Examinatio II zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2022/23

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld

24. März 2023 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Name: ______________________

Matrikelnr.: ______________________

Studiengang: ______________________

#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Σ
Pkte								
Korr								

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Bearbeiten Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die Klausur ist mit 35 oder mehr Punkten garantiert bestanden.

[K0] *Kurzfragen* **[$2+2+2+2+2=10$ Punkte]**

Antworten Sie je in ein bis zwei Zeilen.

(a) Eine Matrix M erhalte alle Längen, d.h. $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$. Welche Determinante hat M ?
(b) Welcher Zusammenhang gilt zwischen Kraft und Potential bei einem konservativen Kraftfeld?
(c) In welcher Beziehung stehen das Skalarprodukt und der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?
(d) Drücken Sie $\cos\varphi$ durch die Exponentialfunktion aus (Euler-Relation).
(e) Vereinfachen Sie $\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta\, f(\cos\vartheta)$ mit Hilfe der Integration durch Substitution.

[K1] *Kraftfeld* **[$3+2+3=8$ Punkte]**

Betrachten Sie im dreidimensionalen Raum das Potential $V(\vec{r}) = -(\vec{a}\cdot\vec{r})^n/r$, wobei $n\in\mathbb{N}$, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor und $r=|\vec{r}|$ ist.

(a) Berechnen Sie das zugehörige Kraftfeld.
(b) Geben Sie für allgemeines n diejenigen Ortsvektoren $\vec{r}$ an, für die die Kraft senkrecht auf ihnen steht, also $\vec{F}\perp\vec{r}$ ist.
(c) Für welches n gilt, dass die Kraft immer senkrecht auf dem Ortsvektor steht, dass also $\vec{F}\perp\vec{r}$ ist? Was bedeutet dies für die Arbeit, die bei einer *radialen* Bewegung verrichtet werden muss?

[K2] *Eigenwerte und Eigenvektoren* **[$5+2+3=10$ Punkte]**

Eine Punktmasse m bewege sich unter Wirkung der Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = -m\,\omega^2\,\hat{M}\,\vec{r}$ mit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Hauptachsen des Systems, indem Sie die normierten Eigenvektoren der Matrix M sowie die zugehörigen Eigenwerte berechnen.
(b) Bestimmen Sie das zugehörige Potential.
(c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für $\vec{r}(t) \doteq (x'(t), y'(t), z'(t))^\intercal$ im Hauptachsensystem zu den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t{=}0) \doteq (0,0,0)^\intercal$, $\dot{\vec{r}}(t{=}0) \doteq (0,v,0)^\intercal$.

[K3] *Vektoren und Bahnkurven* **[$3+4+3=10$ Punkte]**

Eine Kugel der Masse m wird zum Zeitpunkt $t=0$ aus der Höhe $y=h$ unter einem Winkel φ relativ zur Horizontalen mit Geschwindigkeit v_0 abgefeuert und bewegt sich anschließend unter dem Einfluss der Schwerkraft.

(a) Skizzieren Sie die Anordnung und geben Sie den Startpunkt $\vec{x}_0$ und die Startgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ als Vektoren an. *Hinweis*: Das Problem ist zwei-dimensional.
(b) Geben Sie $\vec{x}(t)$ an und bestimmen Sie die Zeit τ, bei der die Kugel auf dem Boden ($y=0$) auftrifft.
(c) Geben Sie die Weite $x(\tau)$ an, die die Kanonenkugel also geflogen ist. Was ergibt sich für $h=0$?

[K4] *Differentialgleichung* **[$2+3+2+2+3=12$ Punkte]**

Die Anzahl $N(t)$ von Kernen eines radioaktiven Elementes hängt von der Zerfallsrate τ^{-1} und der Produktionsrate α in folgender Weise ab: $\dot{N}(t) = -\frac{1}{\tau}\,N(t) + \alpha\,t$ mit $N(0)=0$.

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems.
(b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Problems mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten. Nutzen Sie die Anfangsbedingung, um damit die vollständige Lösung des Problems anzugeben.
(c) Mit welcher Potenz von t *beginnt* N zu wachsen?
(d) Wie verhält sich N für große Zeiten $t \gg \tau$?
(e) Erfüllt Ihre Lösung die Erwartung für stabile Kerne ($\tau\to\infty$)?

Bitte wenden!

[K5] *Gravitation* **[$5 + 5 + 2 = 12$ Punkte]**

Im dreidimensionalen Raum sei eine ringförmige Masseverteilung verschwindender Dicke in der xy-Ebene mit Radius R und konstanter Massendichte $\lambda =$ Masse pro Länge gegeben.

(a) Geben Sie das Gravitationspotential $V(z)$ an, das eine Raumsonde der Masse m bei Bewegung entlang der Symmetrieachse ($x{=}y{=}0$) erfährt. *Hinweis*: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ', φ', z') mit $x' = \rho' \cos\varphi'$, $y' = \rho' \sin\varphi'$ und $\mathrm{d}^3r' = \rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}z'$. Es ist dann $V(z) \equiv V(\vec{r}{=}z\,\vec{e}_z) = -\gamma\, m \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\delta(\rho'-R)\,\delta(z')\,\lambda}{|z\,\vec{e}_z - \vec{r}\,'(\rho',\varphi',z')|}$.

(b) Mit welcher Kreisfrequenz ω führt die Raumsonde kleine harmonische Schwingungen um den Ursprung aus? *Hinweis*: Nähern Sie das Potential für kleine z bis zur quadratischen Ordnung.

(c) Welche Mindestgeschwindigkeit v_∞ müsste sie am Ursprung haben, um das System für immer verlassen zu können?

[K6] *Indexnotation* **[$4 + 4 = 8$ Punkte]**

Es seien drei antisymmetrische Matrizen gegeben, $A_{ij} = \epsilon_{ijp}\, a_p$, $B_{kl} = \epsilon_{klq}\, b_q$ und $C_{mn} = \epsilon_{mnr}\, c_r$. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{sp}(A\,B\,C)$ und drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

(b) Es sei D die Dyade $D = \vec{a} \circ \vec{b}$. Berechnen Sie $-\mathrm{sp}(D\,C)$ und drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.